Fonctions usuelles (#197)

I La fonction ZETA

Soit $z \in \mathbb{C}$: on envisage $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$

A) ~~Convergence simple:~~

Convergence absolue: $z = \overset{s}{x} + i\overset{t}{y}, (\overset{s}{x},\overset{t}{y}) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^s}$$

la série CVA ssi $s > 1$

$\Rightarrow$ $s = 1$: $u_n = \frac{n^{-it}}{n} = \frac{e^{-it\log n}}{n}$ $\quad$ $t = 0$: DV $\quad$ $t \neq 0$: $f(x) = \frac{e^{-it\log x}}{x}$

$$\int_1^{n} f(u)\,du = \left[\frac{1}{-it} e^{-it\log x}\right]_1^n = \frac{1}{-it}\left(e^{-it\log n} - 1\right) \text{ DV}$$

~~$n+1 = k^p$~~

$$\left|u_n - \int_n^{n+1} f\right| = \left|\int_n^{n+1} f(n) - f(t)\, d(t - n+1)\right|$$

$$\underset{IPP}{=} \underbrace{\left[\quad\right]}_{0} + \int_n^{n+1} f'(t)(u - n + 1)\,du \leq \int_n^{n+1} |f'(u)$$

Or $|f'(u)| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right)$ f' int CV

ainsi $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f\right)$ est ACV donc $\sum f(n)$ DV

Ex pens' $0 < s < 1$ idem

$s < 0$: $u_n \not\to 0$

B) Continuité

Continuité sur $\{|z| \mid Re(z) > 1\}$

On localise. Soit z_0 : $Re(z_0) > 1$ on fixe a : $1 < a < Re(z_0)$

$U_a = \{z \mid Re(z) > a\}$ est ouvert par $\mathcal{C}^0$ de Re, $U_a \in \mathcal{V}(z_0)$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in U_a$ $\left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \frac{1}{n^a}$ tg d'une série CV

La série de tg $\frac{1}{n^z}$ est donc NCV sur U_a, de la fct ζ est continue en z_0.

RM Il n'y a pas CV sur $\{Re(z) > 1\}$ sinon par $\mathcal{C}^0$ des fonctions $z \mapsto \frac{1}{z}$, et moyennant le CCV, la CVU se transmet à $\{Re(z) > 1\}$, or pour $z = 1$ la série DV

C) Dérivabilité (sur $]1,+\infty[$)

Soit $x_0 \in]1,+\infty[$. Soit a $1 < a < x_0$, fixons $k \geq 1$ il vient
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [a,+\infty[$ $|u_n^{(k)}(x)| = \left|\frac{(-\log n)^k}{n^x}\right| \leq \frac{\log^k n}{n^a}$

Série CV car $a > 1$

Ainsi : ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ dérivable terme à terme.
$[a,+\infty[$ voisinage de x_0 ✓

D) Asymptotique

En $+\infty$: Sur $[2,+\infty[$, il y a CVU. On applique l'interversion des limites $\exists \lim_{+\infty} \zeta(x) = 1$

DA On regarde $\zeta(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$

$$N^x\left(\zeta(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}\right) = \sum_{k=N+1} \left(\frac{N}{k}\right)^x$$ avec

pour $x \geq 2$ $\left|\frac{N}{k}\right|^{x} \leq \left(\frac{N}{k}\right)^{2}$ série CV à k

Interversion des limites : $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} N^{x}\left(\zeta(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{x}}\right) = 0$

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{x}} + o\left(\frac{1}{N^{x}}\right)$$

En 1^{+} : On compare à une intégrale. Soit $x > 1$

Soit $n \geq 1$: $\frac{1}{n^{x}} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^{x}} \geq \frac{1}{(n+1)^{x}}$

De là $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x}} \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x}} \geq \zeta(x) - 1$

donc $\zeta(x) \geq \frac{1}{x-1} \geq \zeta(x) - 1$

donc $\zeta(x) \underset{1^{+}}{\sim} \frac{1}{x-1}$

II Fonction η $(x \in \mathbb{R})$

On envisage $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{x}}$. Il y a CV ssi $x > 0$ (Leibniz) $\frac{1}{n^{x}} \searrow 0$

A) Continuité

Soit $a > 0$

Soit $x \in [a, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^{*}$

On utilise le CSSA $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{k^{x}}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^{x}} \leq \frac{1}{(n+1)^{a}} \to 0$

Il y a donc CVU sur $[a, +\infty[$, donc au voisinage de tout point η est $\mathcal{C}^{0}$

B) Dérivabilité à l'ordre $p \geq 1$ (Mines, centrale, X)

Soit $a > 0$, $p \in \mathbb{N}^{*}$, $n \in \mathbb{N}^{*}$, $u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n} \frac{(-\log n)^{p}}{n^{x}} = (-1)^{n+p} \frac{\log^{p} n}{n^{x}}$

$t^x = (e^{t\ln x})' = \frac{t}{x} e^{t\ln x} = \frac{t}{x}\frac{1}{t^x}$

On va MQ $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,+\infty[\ \left(|u_m^{(p)}(x)|\right)_{m \geq N}$ décroît

On pose $\varphi(t) = \frac{(\log t)^p}{t^x}$

$$\varphi'(t) = \frac{t^x p\frac{(\log t)^{p-1}}{t} - (\log t)^p \frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{t^x}\right)'}{t^{2x}} = \frac{(\log t)^{p-1}(p - x\log t)}{t^{x+1}}$$

~~$= \frac{t^x p(\log t)^{p-1} + (\log t)^p\, x/t^{x+x}}{t^{2x}}$~~

~~$= \frac{t^{2x} p(\log t)^{p-1}\ x(\log t)^p}{t^{3x}}$~~

~~$= (\log t)^{p-2}\frac{p\, t^{2x} + x\log t}{t^{3x}}$~~

$t \geq 1$: $p - x\log t \leq p - a\log t \leq 0$

dès que $t \geq \exp\left(\frac{p}{a}\right)$

$N = \exp\left(\frac{p}{a}\right) + 1$

Conclusion $\forall n \geq N\ \forall x \in [a,+\infty[\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+p}\frac{(\log k)^p}{k^x}\right| \leq \frac{\log^p(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\log^p(n+1)}{(n+1)^a}$ CV $\to 0$

et η est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,+\infty[$

$\underline{\text{Relation } \zeta - \eta}$: soit $x > 1$: $\eta(x) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^x} - \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^x}$

$$= \frac{1}{2^x}\zeta(x) - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

$$= \frac{1}{2^x}\zeta(x) + \frac{1}{2^x}\zeta(x) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1\right) \zeta(x)$$

Or $\eta(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \eta(1) = -\log(2)$

$$\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{-\log(2)\, 2^{x-1}}{1 - 2^{x-1}} \underset{1^+}{\sim} \frac{-\log 2}{-\log 2 (x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

III La fonction Θ :

il s'agit de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$

Pour $x < 0$ diverge grossièrement, on l'énonce pour $x > 0$

$\forall P^* \mathbb{Z}$: $u_n(x) = \cancel{e^{-\pi n^2 x} = O_x\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ donc la série CVN sur $\mathbb{R}_+^*$

$\underbrace{u_n \, \mathcal{C}^\infty \Rightarrow \text{la somme } \Theta \text{ est } \mathcal{C}^\infty}_{\text{non}}$ } On a donc $\cancel{\left(\sum \ldots\right)}$ Moque c'est dérivable

CVU
$\Downarrow$
CV sur l'adhérence

$\rightarrow$ CV à x_0 fixé :

1) $e^{-n^2 \pi x} n^2 \longrightarrow 0$ donc la série CV

2) Il n'y a pas de CVU sur $]0, +\infty[$
sinon on l'a sur $\mathbb{R}^+$ (CCU + $\mathcal{C}^0$)

et la série DV ~~en~~ 0

Si l'on fixe $a > 0$ il vient $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in [a, +\infty[$: $|u_n(x)| \leqslant \underbrace{e^{-\pi n^2 a}}_{\text{série CV}}$
il y a donc CVN sur $[a, +\infty[$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in [a, +\infty[$ $|u^{(k)}(x)| \leqslant \pi^k n^{2k} e^{-\pi n^2 a}$
donc la série des $u^{(k)}$ CVN sur $[a, +\infty[$
Tout point de $]0, +\infty[$ est intérieur à un tel intervalle
donc Θ est de classe $\mathcal{C}^k$ (DTA + SF)
$\forall x \in]0, +\infty[$: $\Theta^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty} (-1)^k \pi^k n^{2k} e^{-\pi n^2 \cdot x}$

Comportement à l'$\overset{+\infty}{\text{infini}}$: il y a CVN sur $[1,+\infty[$, on peut appliquer l'interversion des limites $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \theta(x)=1$

terme suivant : $e^{\pi x}(\theta(x)-1) = e^{\pi x}\left(2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}\right.$

$= 2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} e^{\pi(1-n^2)x}$ + 2 CVN sur $[1,+\infty$

De là, par interversion de limites : $e^{\pi x}(\theta(x)-1) \xrightarrow[+\infty]{} 2$

$$\theta(x) = 1+2e^{-\pi x}+o(e^{-\pi x})$$

Equivalent en 0^+ Comparaison série/intégrale

$n \Leftrightarrow t$: $\psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[n,n+1]$, on a, $x>0$ étant fixé : ~~$e^{-\pi n^2 x}$~~

$$e^{-\pi n^2 x} \geq \int_n^{n+1} e^{-\pi t^2 x}\,dt \geq e^{-\pi(n+1)^2 x}$$

$$1+\psi(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2 x}\,dt \geq \psi(x)$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2 x}\,dt \underset{u=\sqrt{\pi x}\,t}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $\psi(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \theta(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$